PART4　平方の大小関係，相加平均と相乗平均

例題

(1)　$a>0$，$b>0$ のとき，不等式 $\sqrt{a+b}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$ を証明せよ。

(2)　$a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(i)　$a+\dfrac{1}{a}\geqq 2$　　(ii)　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geqq 9$

Point Pickup

練習

(1)　$a>0$，$b>0$ のとき，不等式 $\sqrt{2a+2b} \geqq \sqrt{a}+\sqrt{b}$ を証明せよ。

(2)　$a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(i)　$a+1+\dfrac{12}{a+1} \geqq 4\sqrt{3}$　　(ii)　$(a+2b)\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geqq 8$

第 2 講　PART4 確認問題

1　$a>0$，$b>0$ のとき，不等式 $2\sqrt{a+b} \geqq \sqrt{2a}+\sqrt{2b}$ を証明せよ。

［証明］

両辺の平方の差を考えると

$$(2\sqrt{a+b})^2-(\sqrt{2a}+\sqrt{2b})^2$$

$$=\boxed{\text{ア}}(a+b)-\left(2a+\boxed{\text{イ}}\sqrt{ab}+2b\right)$$

$$=\boxed{\text{ウ}}a+\boxed{\text{エ}}b-\boxed{\text{オ}}\sqrt{ab}$$

$$=\boxed{\text{カ}}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq \boxed{\text{キ}}$$

よって

$$(2\sqrt{a+b})^2 \geqq (\sqrt{2a}+\sqrt{2b})^2$$

$2\sqrt{a+b}>0$，$\sqrt{2a}+\sqrt{2b}>0$ であるから

$$2\sqrt{a+b} \geqq \sqrt{2a}+\sqrt{2b}$$

2 $a>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

$$a+1+\frac{6}{a+1}\geqq 2\sqrt{6}$$

［証明］

$a>0$ より $a+1>0$，$\dfrac{6}{a+1}>0$ であるから，

(相加平均)≧(相乗平均)より

$$a+1+\frac{6}{a+1}\geqq \boxed{\text{ク}}\sqrt{(a+1)\cdot\frac{\boxed{\text{ケ}}}{a+1}}$$

よって

$$a+1+\frac{6}{a+1}\geqq \boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$$

等号が成り立つのは

$$a+1=\frac{6}{a+1}$$

つまり $(a+1)^2=\boxed{\text{シ}}$ のときで，

$a+1>0$ より

$$a+1=\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$$

すなわち　$a=\sqrt{\boxed{\text{セ}}}-\boxed{\text{ソ}}$ のときである。

3 $a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

$$(a+3b)\left(\frac{12}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqq 27$$

［証明］

$$(\text{左辺})=(a+3b)\left(\frac{12}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$=12+\frac{a}{b}+\frac{\boxed{\text{タチ}}\,b}{a}+3$$

$$=\frac{a}{b}+\frac{\boxed{\text{タチ}}\,b}{a}+\boxed{\text{ツテ}} \quad \cdots\cdots①$$

$a>0$，$b>0$ より，$\frac{a}{b}>0$，$\frac{\boxed{\text{タチ}}\,b}{a}>0$ であるから，

(相加平均)≧(相乗平均)より

$$\frac{a}{b}+\frac{\boxed{\text{タチ}}\,b}{a} \geqq \boxed{\text{ト}}\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{\boxed{\text{タチ}}\,b}{a}}$$

右辺を計算すると

$$\frac{a}{b}+\frac{\boxed{\text{タチ}}\,b}{a} \geqq \boxed{\text{ナニ}} \quad \cdots\cdots②$$

よって，①，②より

$$\frac{a}{b}+\frac{\boxed{\text{タチ}}\,b}{a}+\boxed{\text{ツテ}} \geqq \boxed{\text{ナニ}}+\boxed{\text{ツテ}}=27$$

したがって

$$(a+3b)\left(\frac{12}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqq 27$$

等号が成り立つのは $\frac{a}{b}=\frac{\boxed{\text{タチ}}\,b}{a}$ より $a=\boxed{\text{ヌ}}\,b$ のときである。

[MEMO]

PART4　平方の大小関係，相加平均と相乗平均

例題

(1)　$a>0$，$b>0$ のとき，不等式 $\sqrt{a+b}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$ を証明せよ。

(2)　$a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(i)　$a+\dfrac{1}{a}\geqq 2$　　　(ii)　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geqq 9$

(1)　両辺の平方の差をとると

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2=(a+2\sqrt{ab}+b)-(a+b)=2\sqrt{ab}>0$$

よって　$(\sqrt{a+b})^2<(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$\sqrt{a+b}>0$，$\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$　であるから　$\sqrt{a+b}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$

(2)(i)　$a>0$，$\dfrac{1}{a}>0$ より，(相加平均)≧(相乗平均)から

$$a+\frac{1}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2\cdot 1=2$$

よって　$a+\dfrac{1}{a}\geqq 2$

等号が成り立つのは，$a=\dfrac{1}{a}$ つまり $a=1$ のときである。

(ii)　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)=ab+4+1+\dfrac{4}{ab}=ab+\dfrac{4}{ab}+5$

$a>0$，$b>0$ より，$ab>0$，$\dfrac{4}{ab}>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均)より

$$ab+\frac{4}{ab}\geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}=2\cdot 2=4$$

よって　$ab+\dfrac{4}{ab}+5\geqq 4+5=9$

したがって　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geqq 9$

等号が成り立つのは　$ab=\dfrac{4}{ab}$　つまり　$ab=2$　のときである。

練習

(1)　$a>0$，$b>0$ のとき，不等式 $\sqrt{2a+2b} \geqq \sqrt{a}+\sqrt{b}$ を証明せよ。

(2)　$a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(i)　$a+1+\dfrac{12}{a+1} \geqq 4\sqrt{3}$　　(ii)　$(a+2b)\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geqq 8$

(1)　両辺の平方の差をとると

$$(\sqrt{2a+2b})^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=2a+2b-(a+2\sqrt{ab}+b)=a-2\sqrt{ab}+b$$
$$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0$$

よって　$(\sqrt{2a+2b})^2 \geqq (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$\sqrt{2a+2b}>0$，$\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$　であるから　$\sqrt{2a+2b} \geqq \sqrt{a}+\sqrt{b}$

（参考）　等号が成り立つのは　$\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$　すなわち　$a=b$ のときである。

(2)(i)　$a>0$ より $a+1>0$，$\dfrac{12}{a+1}>0$ であるから，（相加平均）≧（相乗平均）より

$$a+1+\frac{12}{a+1} \geqq 2\sqrt{(a+1)\cdot\frac{12}{a+1}}=2\sqrt{12}=4\sqrt{3}$$

よって　$a+1+\dfrac{12}{a+1} \geqq 4\sqrt{3}$

等号が成り立つのは　$a+1=\dfrac{12}{a+1}$

つまり　$(a+1)^2=12$　のときで，$a+1>0$ より　$a+1=2\sqrt{3}$

すなわち　$a=-1+2\sqrt{3}$　のときである。

(ii)　$(a+2b)\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=2+\dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a}+2=\dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a}+4$

$a>0$，$b>0$ より，$\dfrac{a}{b}>0$，$\dfrac{4b}{a}>0$ であるから，（相加平均）≧（相乗平均）より

$$\frac{a}{b}+\frac{4b}{a} \geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{4b}{a}}=2\cdot 2=4$$

よって　$\dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a}+4 \geqq 4+4=8$　　したがって $(a+2b)\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geqq 8$

等号が成り立つのは　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{4b}{a}$　つまり　$a^2=4b^2$　より　$a=2b$　のときである。

第 2 講　PART4 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：4，イ：4，ウ：2，エ：2，オ：4，
カ：2，キ：0

[解説]

両辺の平方の差をとると [A]

$$(2\sqrt{a+b})^2-(\sqrt{2a}+\sqrt{2b})^2$$
$$=4(a+b)-(2a+4\sqrt{ab}+2b)$$
$$=2a+2b-4\sqrt{ab}$$
$$=2(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0$$

よって

$$(2\sqrt{a+b})^2 \geqq (\sqrt{2a}+\sqrt{2b})^2$$

$2\sqrt{a+b}>0$，$\sqrt{2a}+\sqrt{2b}>0$ であるから

$$2\sqrt{a+b} \geqq \sqrt{2a}+\sqrt{2b}$$

[A]　不等式 $A \geqq B$ の証明
$A>0$，$B>0$ ならば，A^2-B^2 を計算し，その結果が 0 以上であることを示してもよい。

2 **[正解]** ク：2，ケ：6，コ：2，サ：6，シ：6，
ス：6，セ：6，ソ：1

[解説]

$a>0$ より $a+1>0$，$\dfrac{6}{a+1}>0$ であるから，

（相加平均）≧（相乗平均）より

$$a+1+\frac{6}{a+1} \geqq 2\sqrt{(a+1)\cdot\frac{6}{a+1}}$$ [B]

よって

$$a+1+\frac{6}{a+1} \geqq 2\sqrt{6}$$

等号が成り立つのは

$$a+1=\frac{6}{a+1}$$ [B]

つまり　$(a+1)^2=6$　のときで，$a+1>0$ より

$$a+1=\sqrt{6}$$

すなわち　$a=\sqrt{6}-1$　のときである。

[B]　相加平均と相乗平均の大小関係
$a>0$，$b>0$ のとき
$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$
等号が成り立つのは，$a=b$ のとき

3 **[正解]** タチ：36，ツテ：15，ト：2，ナニ：12，

ヌ：6

[解説]

$$(\text{左辺})=(a+3b)\left(\frac{12}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$=12+\frac{a}{b}+\frac{36b}{a}+3$$

$$=\frac{a}{b}+\frac{36b}{a}+\mathbf{15}\quad\cdots\cdots①$$

$a>0$，$b>0$ より，$\dfrac{a}{b}>0$，$\dfrac{36b}{a}>0$ であるから，

(相加平均)≧(相乗平均)より

$$\frac{a}{b}+\frac{36b}{a}\geqq \mathbf{2}\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{36b}{a}}$$ [C]

右辺を計算すると

$$\frac{a}{b}+\frac{36b}{a}\geqq \mathbf{12}\quad\cdots\cdots②$$

よって，①，②より

$$\frac{a}{b}+\frac{36b}{a}+15\geqq 12+15=27$$

したがって

$$(a+3b)\left(\frac{12}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqq 27$$

等号が成り立つのは　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{36b}{a}$

つまり　$a^2=36b^2$ より $a=\mathbf{6}b$ のときである。 [C]

> [C]　相加平均と相乗平均の大小関係
> $a>0$，$b>0$ のとき
> $\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$
> 等号が成り立つのは，$a=b$ のとき